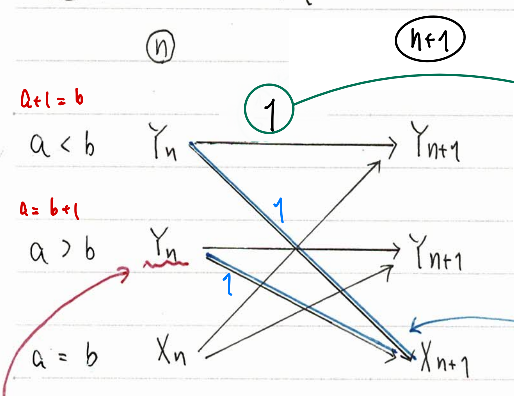
2001年　東大数学　文系第3問 ①

(1) 条件を整理。

表の時：$a>b$ なら $a+1$, $b+1$；$a\leqq b$ なら $a+1$

裏の時：$a<b$ なら $a+1$, $b+1$；$a\geqq b$ なら $b+1$

遷移図を描くて、($a<b$ となる場合の数を Y_n として。)



今回の遷移図は確率ではなく場合の数。矢印の数字も場合の数を書き込む。

$Y_n\to Y_{n+1}$ の遷移は「コインで裏か出る」での1通り

X_{n+1} に集まる矢印も1通り

対称性から、$a<b$ となる場合の数と $a>b$ となる場合の数は等しい。

条件から、AとBの座標の差は、高々1以下。

よって、$a<b$ の時は必ず $b-a=1$ であり、表が出たら $a=b$ になる。

$a>b$ の時も同様。

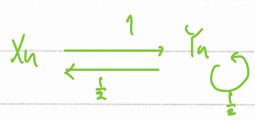
遷移図から、

$X_{n+1}=Y_n+Y_n$ …①

$\left(\begin{array}{l} Y_{n+1}=X_n+Y_n \\ Y_{n+1}=X_n+Y_n \end{array}\right)$ 今回は不要だが、一応書いた。

また、全ての場合の数は、2^n なので、（n回コインを投げたとき）

$X_n+Y_n+Y_n=2^n$ …②



①と②より $X_{n+1}=-X_n+2^n$

$a_{n+1}=2a_n+3^n$

$\boxed{\frac{X_{n+1}}{(-1)^{n+1}}}=\frac{-1}{-1}\boxed{\frac{X_n}{(-1)^n}}+\frac{2^n}{(-1)^{n+1}}$　$\frac{X_n}{(-1)^n}=W_n$

$W_{n+1}=W_n-(-2)^n$

(2) (1)で求めた漸化式を解く。

両辺に $(-1)^{n+1}$ をかけて、

$(-1)^{n+1}X_{n+1}=(-1)^nX_n-(-2)^n$

$(-1)^nX_n=Z_n$ とおくと、

$Z_{n+1}=Z_n-(-2)^n$

これは階差数列なので、

$n\geqq2$ の時、
$$Z_n=Z_1-\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=0-(-2)\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=-\frac{2}{3}\{(-2)^{n-1}-1\}$$

X_n に戻し、

$(-1)^nX_n=-\frac{2}{3}\{(-2)^{n-1}-1\}$

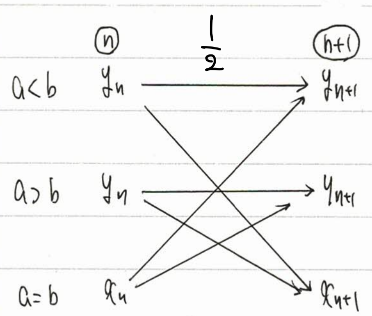
$X_n=\frac{2}{3}\{2^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$

$n=1$ のとき $X_1=\frac{2}{3}(2^0-(-1)^0)=0$ なので、$n\geqq1$ で成立する

別解

場合の数の遷移図に慣れていない場合、確率の遷移図を描いてもOK。

$\frac{X_n}{2^n}=x_n$ とおくと、x_n は、n回コインを投げたとき、$a=b$ となる確率を表す。同様に、$\frac{Y_n}{2^n}=y_n$ とする。



$x_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_n$

$x_n+y_n+y_n=1$ から、$x_{n+1}=-\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}$ を導き、

両辺に 2^{n+1} をかけて　$X_{n+1}=-X_n+2^n$ と求められる。

2001年　東大数学　文系第3問 (2)

$\boxed{別解}$

$x_{n+1} = -x_n + 2^n$ を指数型とみて、

$\downarrow \div 2^{n+1}$

$\dfrac{x_{n+1}}{2^{n+1}} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x_n}{2^n} + \dfrac{1}{2}$

$\downarrow$ $\dfrac{x_n}{2^n} = a_n$ とおく.

$a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}$

$\left(\alpha = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2} \right.$

より $\left. \alpha = \dfrac{1}{3} \right)$

$a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$

$a_n = \left(a_1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$

$\downarrow$ $a_1 = \dfrac{x_1}{2^1} = 0$

$= -\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$

$\downarrow$ $a_n = \dfrac{x_n}{2^n}$ を代入.

$\dfrac{x_n}{2^n} = -\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$

$\therefore x_n = -\dfrac{2}{3}\cdot(-1)^{n-1} + \dfrac{1}{3}\cdot 2^n$ //